

# Política de racionamiento bajo restricciones de nivel de servicio y demanda estocástica continua.

P. Escalona R.<sup>a</sup>, F. Ordoñez<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Centro Integrado de Manufactura y Automatización, Universidad Técnica Federico Santa María, Avenida España 1680, Valparaíso, Chile.

<sup>b</sup>Departamento de Industrias, Universidad de Chile, República 701, Santiago, Chile

---

## Abstract

En este trabajo se analiza la política de nivel crítico como mecanismo para proveer niveles de servicio diferenciado a dos clase de demanda (alta y baja prioridad) cuando el sistema de inventario opera bajo una política de reabastecimiento  $(Q, r)$  de revisión continua y la demanda de clase es modelada a través de una distribución continua. Para determinar los parámetros óptimos de esta política se plantea un problema de nivel de servicio y las características operacionales del sistema son determinadas a través del *hitting time*. Se derivan propiedades estructurales de las restricciones de nivel de servicio que permiten construir un algoritmo para determinar la solución óptima del problema.

*Keywords:* Inventory rationing, service level constraint, hitting time, two demand classes

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Existen diferentes políticas para implementar un sistema de control de inventarios que provea niveles de servicio diferenciados a diferentes clases de demanda. El mecanismo más sencillo es servir la demanda de una reserva común y usar inventarios de seguridad separados para cada clase (*Separate Stock Policy*). Sin embargo, al separar los inventarios de seguridad no se aprovecha el beneficio de los inventarios centralizados. En este sentido, la política de inventarios separados puede ser superada por un mecanismo donde se sirva toda la demanda de una reserva común y el inventario de seguridad seteado de tal manera que el nivel de servicio provisto sea igual al máximo requerido entre el conjunto de clases de demanda (*Round-up Policy*). En este caso, aunque toda la demanda este centralizada y la variabilidad reducida, esta política puede proporcionar demasiado inventario para clases con requerimientos de servicio menor al máximo. Un tercer mecanismo es servir la demanda de una reserva común, pero haciendo uso de una política de nivel-crítico para racionar el inventario entre las diferentes clases de demanda. Esta política consiste en que tan pronto como el nivel del inventario cae por debajo de un nivel crítico se deja de servir las demandas de baja prioridad y se pospone la entrega de estas demandas hasta la próxima llegada de una orden de reabastecimiento (*backorder*), o bien se asume la pérdida de demanda (*Lost Sale*). Tanto la política de inventarios separados como la política *round-up* son factibles de implementar independiente de la política de revisión y de la forma en que se modela la demanda (continua o discreta). Esto no ocurre con la política de nivel crítico ya que, al igual que comprueban Y. Wang et al. [1], y Möllering y Thonemann [2], las investigaciones previas asociados a políticas de nivel crítico que operan bajo revisión continua asumen demanda discreta. El objetivo de este paper es cerrar esta brecha determinando los parámetros óptimos de una política de nivel crítico cuando el sistema de inventarios opera bajo revisión continua y la demanda estocástica de clase es modelada a través de una distribución continua.

Una revisión exhaustiva sobre racionamiento de inventarios puede encontrarse en Kleijn y Dekker [3] y mas recientemente en Möllering y Thonemann [2]. En particular, Kleijn y Dekker [3] clasifican los sistemas de

---

*Email addresses:* pablo.escalona@usm.cl (P. Escalona R.), fordon@dii.uchile.cl (F. Ordoñez)

inventarios sujeto a múltiples clases de demanda en base a dos características, *política de revisión* (continua o periódica) y *número de clases* (2 o mas). Teunter y Haneveld [4] amplían la clasificación anterior incorporando el *shortage treatment* (backorder o lost sale), la *política de racionamiento* (no-rationing, static, dynamic), la *política de reabastecimiento* y la *forma en que se modela el tiempo* (discreta o continua). Möllering y Thonemann [2] clasifican la literatura asociada a la política de nivel crítico en tres corrientes de investigación, la primera se enfoca en encontrar los parámetros óptimos en entornos sencillo, la segunda en determinar los parámetros óptimos para la política lote por lote de revisión continua y finalmente la tercera línea en la forma en que se satisfacen los backorders de las diferentes clases al implementar una política de reabastecimiento  $(Q, r)$  de revisión continua.

Nuestro modelo corresponde a una política de nivel crítico constante de revisión y demanda continua. En este sentido, Nahmias y Dammy [5] fueron los primeros en estudiar la política de revisión continua con dos clases de demanda. Estos autores asumen una política de reabastecimiento  $(Q, r)$  con nivel crítico constante, demanda Poisson, full-backorders y lead time determinístico. Al asumir que existe a lo mas una orden de reabastecimiento pendiente y usando el *hitting time* para modelar el comportamiento del inventario, desarrollaron una formulación aproximada para el número esperado de backorder por ciclo para ambas clases de demanda. Su trabajo no tiene por objetivo determinar los parámetros óptimos de la política de nivel crítico. Moon y Kang [6] extendieron el trabajo de Nahmias y Dammy [5] a múltiples clases de demanda. Melchior et al. [7] también analiza un modelo  $(Q, r)$  de revisión continua, lead time determinístico y dos clases de demanda, pero a diferencia de Nahmias y Dammy [5], consideran un ambiente con lost sale. Para determinar los parámetros óptimos de la política de nivel crítico estos autores proponen un problema de optimización de costos y presentan un procedimiento numérico para su resolución. Asumen demanda Poisson y para caracterizar operacionalmente el nivel del inventario hacen uso del *hitting time*. Isotupa [8] presenta un modelo con los mismos supuestos que Melchior et al. [7] pero con lead time exponencialmente distribuido. Este supuesto permite determinar los costos esperados del sistema de inventario en estado estable y demostrar que la función de costos es pseudo-convexa respecto al lote de reabastecimiento  $Q$  y el punto de reorden  $r$ . Tempelmeier [9] considera una política de nivel crítico  $(Q, r, C)$  de revisión continua en tiempo discreto para dos clases de demanda y full-backorders. Este autor, basado en teoría de la renovación, deriva aproximaciones para los fill-rates de cada clase, para la distribución del periodo de racionamiento y para el valor esperado del inventario a la mano en estado estable.

Al implementar una política  $(Q, r)$  de revisión continua y full-backorder, que raciona el inventario mediante una política de nivel crítico, puede suceder que el lote de reabastecimientos entrante no sea lo suficientemente grande para cubrir los backorders y dejar el nivel del inventario por arriba del punto de reorden. Por lo tanto, es relevante la forma en que se satisfacen los backorders de las diferentes clases (*backorder clearing mechanism*). Según Möllering y Thonemann [2] es óptimo satisfacer los backorder de las clases con alta prioridad antes de los de baja prioridad. Esta política es difícil de analizar matemáticamente y dada su complejidad la literatura se ha enfocado en reglas sub-óptimas pero manejables, e.g. el *threshold clearing mechanism* de Deshpande et al. [10] y el *FCFS type clearing scheme* de Arslan et al. [11]. Deshpande et al. [10] analizan el mismo modelo de racionamiento  $(Q, r)$  que Nahmias y Dammy [5], pero sin la restricción en el número de ordenes pendientes. Al implementar su *threshold clearing mechanism*, derivaron expresiones para el número esperado de backorders por ciclo y para el valor esperado del inventario a la mano y backorders en estado estable utilizando un enfoque *state-dependent demand* para modelar el sistema de inventarios. Basados en estas expresiones Deshpande et al. [10] proponen un modelo de optimización de costos y desarrollan algoritmos para calcular los parámetros óptimos de la política de nivel crítico. Arslan et al. [11] presentan un modelo de nivel de servicio para obtener los parámetros óptimos de una política de nivel crítico con número arbitrario de clases bajo el supuesto de demanda Poisson, lead time determinístico, y política  $(Q, r)$  de revisión continua pero implementando su *backorder clearing mechanism* basado en la regla FCFS. D. Wang et al. [12] analizan la política de racionamiento bajo las mismas condiciones operacionales que Deshpande et al. [10] pero a diferencia de estos, consideran un criterio mixto de servicio.

De la revisión bibliográfica realizada solo Arslan et al. [11], Dekker et al. [13], Möllering y Thonemann [2], e Y. Wang et al. [1] utilizan un enfoque de nivel de servicio para determinar los parámetros óptimos de la política de nivel crítico. Independiente del autor, el problema de nivel de servicio siempre es el mismo,

minimizar el valor esperado del inventario a la mano sujeto a que el nivel de servicio provisto a cada clase sea mayor a su nivel preestablecido. Dependiendo de las condiciones operacionales definidas para el sistema de inventario, lo que varia en cada problema es la formulación del valor esperado del inventario a la mano y el nivel de servicio provisto a cada clase. Dekker et al. [13] analizan la política de nivel crítico cuando el sistema de inventarios opera bajo una política de reabastecimiento lote por lote, de revisión continua, lost sales, y demanda Poisson. Estos autores derivan expresiones para el *fill-rate* y presentan un método eficiente para obtener soluciones óptimas. Möllering y Thonemann [2] analizan un sistema de inventarios de revisión periódica con dos clases de demanda, lead time determinístico, distribución de demanda discreta, full backorder y *base stock policy* para el reabastecimiento del inventario. Estos autores modelan el sistema de inventarios como una cadena de Markov multidimensional y resuelven en forma óptima un problema de nivel de servicio basado en *service level type 1* y otro basado en *fill-rate*. Y. Wang et al. [1] analizan el mismo modelo que Möllering y Thonemann [2], pero a diferencia de estos, consideran una política de racionamiento anticipativa. Esta política reserva inventario para la clase de alta prioridad tomando en consideración, además de un nivel crítico, el lote de reabastecimiento entrante en el siguiente periodo.

En este trabajo estamos interesados en una política de nivel crítico constante cuando el racionamiento obedece a la presencia de dos clases de demanda y la priorización se realiza en base a niveles de servicio preestablecidos para cada clase. El sistema de inventarios opera bajo una política de reabastecimiento  $(Q, r)$  de revisión continua, full-backorder y lead time determinístico, mientras que la demanda de clase es estocástica y se caracteriza por una distribución continua. Como la priorización se realiza en base a niveles de servicio preestablecidos, se plantea un problema de nivel de servicio para determinar los parámetros óptimos de la política de nivel-crítico. La principal contribución de este trabajo es que modelamos y resolvimos en forma óptima un problema de inventarios con nivel crítico constante cuando la distribución de la demanda es continua y el sistema de inventario opera bajo una política de revisión continua. Las investigaciones previas sobre racionamiento de inventarios resuelven en forma óptima problemas de revisión periódica con distribución de demanda discreta, o problemas de revisión continua con distribución de demanda Poisson.

El resto de este artículo esta organizado de la siguiente forma. En la sección 2 se describe el contexto en que opera el sistema de inventarios y se plantea el problema de nivel de servicio; en la sección 3 se derivan propiedades estructurales de las restricciones de nivel de servicio que nos permitieron construir un algoritmo de solución óptima; la sección 4 presenta el estudio computacional que nos permitió validar numéricamente los algoritmos propuestos y comparar el desempeño de la política de nivel crítico con las políticas de inventarios separados y *round-up*; finalmente en la sección 5 se presentan nuestras conclusiones y se proponen futuras extensiones de este trabajo.

## 2. PROBLEMA DE NIVEL DE SERVICIO

Consideremos una instalación que mantiene inventario de un solo tipo de producto para servir a dos clases de demanda  $i = 1, 2$ , donde la clase 1 es de alta prioridad y la clase 2 es de baja prioridad. Cada clase tiene demanda por unidad de tiempo normalmente distribuida, de media  $\mu_1$  y varianza  $\sigma_1^2$  para la demanda de alta prioridad y  $\mu_2$  y  $\sigma_2^2$  para la demanda de baja prioridad. Se considera que la demanda de cada clase es independiente de la demanda de otra clase. Sea  $D(t, t + \tau)$  la demanda acumulada de ambas clases en el intervalo de tiempo  $[t, t + \tau]$ . Como la demanda por unidad de tiempo de cada clase es normalmente distribuida e independiente, la demanda acumulada en el intervalo  $[t, t + \tau]$  también se distribuye normal tal que  $D(t, t + \tau) = D(\tau)$  y  $D(\tau) \sim N(\mu\tau, \sigma^2\tau)$ , donde  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  y  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ .

El reaprovisionamiento del inventario se realiza de acuerdo a una política  $(Q, r, C)$  de revisión continua que opera de la siguiente forma: cuando el nivel del inventario cae bajo el nivel de reorden  $r$ , se emite una orden de reabastecimiento de tamaño  $Q$  la cual arriba después de  $L > 0$  unidades de tiempo. La demanda de ambas clases es satisfecha siempre que el nivel del inventario sea mayor que el nivel crítico  $C$ , de otra forma, solo la demanda de alta prioridad es satisfecha del inventario a la mano y la demanda de baja prioridad es backorder. Al igual que Melchioris et al. [7] y Nahmias y Demmy [5], existe a lo mas una orden de reabastecimiento pendiente. Por otro lado, aunque no es necesario, se considera que  $r \geq C \geq 0$  y que el lead time es fijo. Para la política tradicional  $(Q, r)$ , Axsäter [14] indica,

although it is, in general, relatively easy to derive the optimal solution, it is common in practice to use an approximate solution that is obtained in two steps. First the stochastic demand is replaced by its mean and the order quantity  $Q$  is determined by the deterministic EOQ formula. Given this batch quantity the optimal reorder point is determined in the second step (p.830).

En este trabajo se asume la misma estrategia indicada por Axsäter [14], es decir, el lote de reabastecimiento  $Q$  se asume conocido y nos enfocamos en determinar el punto de reorden  $r$  y nivel crítico  $C$  óptimos de la política de nivel crítico. Además, se asume que el lote de reabastecimiento  $Q$  es lo suficientemente grande para cubrir los backorders de ambas clases (si existieran) en cada ciclo de reabastecimiento de tal forma que el nivel del inventario queda por arriba del punto de reorden  $r$ .

Dada la estrategia de control de inventarios, y al igual que Dekker et al. [13], Möllering y Thonemann [2], e Y. Wang et al. [1], nuestro objetivo es determinar los parámetros óptimos de la política de nivel crítico tal que se minimice el valor esperado del inventario a la mano en estado estable, sujeto a que el nivel de servicio provisto a cada clase sea mayor a su nivel preestablecido. En la política  $(Q, r, C)$  de revisión continua, full-backorder y lead time determinístico, el valor esperado del inventario a la mano en estado estable es:

$$\mathbb{E}(OH(\infty)) = \frac{Q}{2} + r - \mu L + \mathbb{E}(B_1(\infty)) + \mathbb{E}(B_2(\infty)) \quad (1)$$

Donde  $OH(\infty)$  es el inventario a la mano en estado estable y  $B_i(\infty)$  es el backorder de clase  $i$ ,  $i = 1, 2$ , en estado estable. Dado el lote de reabastecimiento  $Q$  y suponiendo que los backorders en estado estable son despreciables, el problema de nivel de servicio se reduce a determinar el punto de reorden  $r$  y nivel crítico  $C$  óptimos tal que se minimice el punto de reorden  $r$  sujeto a que el nivel de servicio provisto a cada clase sea mayor o igual que su nivel preestablecido. En este paper, el nivel de servicio se mide por la probabilidad de satisfacer la totalidad de la demanda de cada clase durante un ciclo de reabastecimiento desde el inventario a la mano (nivel de servicio tipo 1). Sea  $sl_i(r, C)$  el nivel de servicio provisto a la clase  $i$  y  $\beta_i$  el nivel de servicio preestablecido para la clase  $i$ , siendo la clase 1 la de mayor nivel de servicio y la clase 2 la de menor nivel de servicio, i.e.,  $\beta_1 > \beta_2$ . Luego, el problema de nivel de servicio (SLP) puede ser formulado como sigue:

$$\min_{r, C} \quad r \quad (2)$$

$$\text{s.a: } sl_1(r, C) \geq \beta_1 \quad (3)$$

$$sl_2(r, C) \geq \beta_2 \quad (4)$$

$$r \geq C \geq 0 \quad (5)$$

Para determinar las características operacionales del sistema de inventarios, en este artículo, se asume un enfoque de *hitting time*. Al igual que Nahmias y Demmy [5] se define el *hitting time*  $\tau_H$  como la cantidad de tiempo que transcurre desde que se emite una orden de reabastecimiento hasta que el nivel crítico  $C$  es alcanzado. Claramente  $\tau_H$  corresponde al tiempo requerido para demandar  $r - C$  unidades de producto.

$$\mathbb{P}(\tau_H < \tau) = \mathbb{P}(D(\tau) > r - C) \quad (6)$$

Ya que la demanda acumulada en el intervalo  $[t, t + \tau]$  es normalmente distribuida,  $\tau_H$  es variable aleatoria con función de densidad  $f_H^{r, C}(\tau)$  dada por:

$$f_H^{r, C}(\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \varphi\left(\frac{r - C - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \left(\frac{r - C + \mu\tau}{2\tau}\right) \quad (7)$$

donde  $\varphi(x)$  es la función de densidad de la normal estándar y los superíndices denotan la dependencia de la función de densidad respecto al punto de reorden  $r$  y nivel crítico  $C$ .

Para que exista racionamiento el *hitting time* debe ocurrir durante el lead time. Las figuras (1a) y (1b) ilustran dos posibles ciclos para la política  $(Q, r, C)$ . En la figura (1a) el nivel crítico  $C$  es alcanzado durante el lead time y por lo tanto existe racionamiento en este ciclo, mientras que en la figura (1b) el *hitting time* es alcanzado después del lead time, es decir, no existe racionamiento en este ciclo.

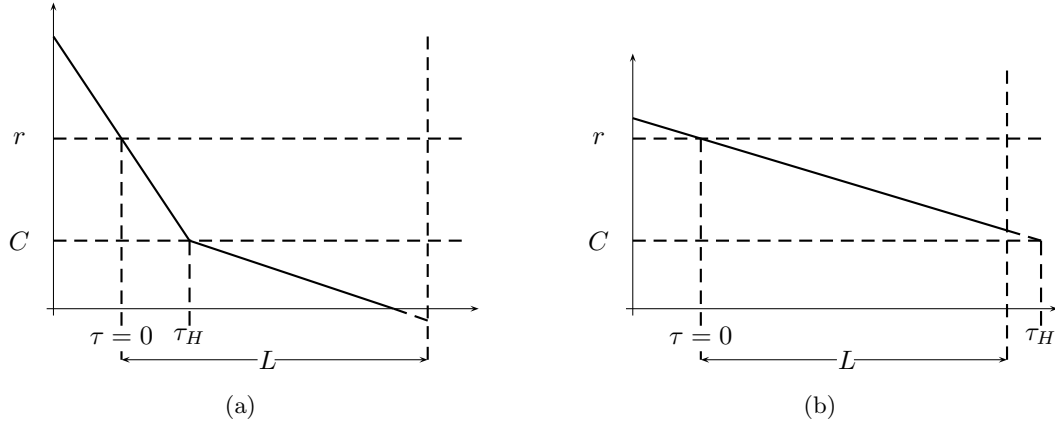


Figura 1: Ciclos típicos para la política  $(Q, r, C)$

Una vez caracterizado el *hitting time* podemos definir el nivel de servicio provisto a cada clase. Las condiciones para satisfacer totalmente la demanda de clase 2 en un ciclo de reabastecimiento son: (i) que no exista racionamiento (figura (1b)), i.e.,  $D(L) \leq r - C$ , y (ii) que se produzca racionamiento y no exista demanda de clase 2 durante este periodo (figura (1a)), i.e.,  $D_2(L - \tau_H) \leq 0 \wedge \tau_H < L$ . La probabilidad que se produzca racionamiento y que no exista demanda de clase 2 durante este periodo se considera despreciable, i.e.,  $\mathbb{P}(D_2(L - \tau_H) \leq 0, \tau_H < L) \sim 0$ . Luego, el nivel de servicio provisto a la clase de baja prioridad es:

$$sl_2(r, C) = \mathbb{P}(D(L) \leq r - C) \quad (8)$$

La condición para satisfacer la totalidad de la demanda de clase 1 en un ciclo de reabastecimiento es que (i) que no exista racionamiento y (ii) que se produzca racionamiento y que la demanda de clase 1 durante este periodo sea menor o igual al nivel crítico  $C$ , i.e.,  $D_1(L - \tau_H) \leq C \wedge \tau_H < L$ . Luego, el nivel de servicio provisto a la clase de alta prioridad es:

$$sl_1(r, C) = \mathbb{P}(D(L) \leq r - C) + \mathbb{P}(D_1(L - \tau_H) \leq C, \tau_H < L) \quad (9)$$

Condicionando en el *hitting time* la ec.(9), el nivel de servicio provisto a la clase de alta prioridad queda:

$$sl_1(r, C) = \int_0^L \mathbb{P}(D_1(L - \tau) \leq C) f_H^{r,C}(\tau) d\tau + \mathbb{P}(D(L) \leq r - C) \quad (10)$$

Definido el nivel de servicio provisto a cada clase, el problema (SLP) puede ser formulado como un problema de optimización estocástica con restricciones en probabilidad:

$$\min_{r,C} r \quad (11)$$

$$\text{s.a: } \int_0^L \mathbb{P}(D_1(L - \tau) \leq C) f_H^{r,C}(\tau) d\tau + \mathbb{P}(D(L) \leq r - C) \geq \beta_1 \quad (12)$$

$$\mathbb{P}(D(L) \leq r - C) \geq \beta_2 \quad (13)$$

$$r \geq C \geq 0 \quad (14)$$

El objetivo es minimizar el punto de reorden sujeto a satisfacer el nivel de servicio para cada clase de demanda. La restricción (12) asegura satisfacer el nivel de servicio preestablecido para la clase de alta prioridad y la restricción (13) asegura el cumplimiento del nivel de servicio preestablecido para la clase de baja prioridad.

### 3. CARACTERIZACIÓN DE LA SOLUCIÓN EXACTA

Para determinar los parámetros óptimos de la política de nivel-crítico se aprovecha la estructura de las restricciones del problema (11)-(14). De estas restricciones se derivan resultados estructurales para nuestro modelo de inventarios. Aunque los resultados son de interés por si mismos, también son necesarios para desarrollar el algoritmo que permite obtener la solución exacta del problema de nivel de servicio.

**Proposición 1.**  $sl_2(r, C)$  es creciente en  $r$  y decreciente en  $C$ .

*Proof.* Este resultado es intuitivo: (i) para un punto de reorden  $r$  fijo, al aumentar el nivel crítico  $C$ , menor es la cantidad de producto disponible durante el lead time para satisfacer la demanda de ambas clases y en consecuencia el nivel de servicio provisto a la clase de baja prioridad disminuye; (ii) para un nivel crítico  $C$  fijo, a medida que aumenta el punto de reorden  $r$ , mayor es la cantidad de producto disponible durante el lead time para satisfacer la demanda de ambas clases y en consecuencia el nivel de servicio provisto a la clase 2 aumenta.  $\square$

**Proposición 2.**  $sl_2(r, C)$  solo depende de la diferencia  $(r - C)$ , y no del valor individual de  $r$  y  $C$ , i.e.,  $sl_2(r, C) = sl_2(r + k, C + k)$ ,  $\forall k \geq 0$ .

*Proof.* Un incremento  $k > 0$  en el punto de reorden  $r$  y nivel crítico  $C$  no produce efecto en la ec.(8).  $\square$

Una consecuencia inmediata de la proposición 2 es que la restricción de nivel de servicio  $sl_2(r, C) \geq \beta_2$  siempre es satisfecha si la diferencia entre  $r$  y  $C$  excede un cierto valor.

**Proposición 3.**  $sl_1(r, C)$  es creciente en  $r$  y  $C$ .

*Proof.* Este resultado es también intuitivo: (i) para un nivel crítico  $C$  fijo, a medida que aumenta el punto de reorden  $r$ , es menos probable alcanzar el *rationing time* durante el lead time y en consecuencia el nivel de servicio provisto a la clase 1 aumenta; (ii) para un punto de reorden  $r$  fijo, al aumentar el nivel crítico  $C$ , mayor cantidad de unidades son reservadas para satisfacer la demanda de clase prioritaria y en consecuencia, el nivel de servicio provisto a esta clase aumenta.  $\square$

**Proposición 4.** El nivel de servicio provisto a la clase 1 es siempre mayor al nivel de servicio provisto a la clase 2, i.e.,  $sl_1(r, C) > sl_2(r, C)$ ,  $\forall r \geq C \geq 0$ .

*Proof.* De la ec.(8) y ec.(10) y considerando que  $\mathbb{P}(D_1(L - \tau) \leq C) > 0$ ,  $\forall C \geq 0$  y  $f_H(\tau) > 0$ ,  $\forall r \geq C \geq 0$  se concluye que  $sl_1(r, C) > sl_2(r, C)$   $\square$

La principal consecuencia de la proposición 1 es que, dado un punto de reorden  $r$  fijo, el máximo nivel de servicio provisto a la clase de baja prioridad es  $sl_2(r, 0)$ . Luego, a medida que aumenta el nivel crítico  $C$ , el nivel de servicio provisto a la clase 2 solo puede disminuir. Por otro lado, de la proposición 3 se puede derivar que, dado un punto de reorden  $r$  fijo, el mínimo nivel de servicio provisto a la clase de alta prioridad es  $sl_1(r, 0)$ . Luego, a medida que aumenta el nivel crítico  $C$ , el nivel de servicio provisto a la clase 1 solo puede aumentar. Además, de la proposición 4 se deriva que  $sl_1(r, 0) > sl_2(r, 0)$ ,  $\forall r \geq 0$ .

Sea  $r_i^0$  el mínimo punto de reorden  $r$  tal que el nivel de servicio provisto a la clase  $i$ , dado un nivel crítico  $C = 0$ , sea mayor o igual que su nivel de servicio preestablecido  $\beta_i$ , i.e.,  $r_i^0 = \min\{r \mid sl_i(r, 0) \geq \beta_i\}$ . De la proposición 1, se deriva que  $r_2^0$  es solución de  $sl_2(r, 0) = \beta_2$ , luego:

$$r_2^0 = \mu L + z_{\beta_2} \sigma \sqrt{L} \quad (15)$$

Donde,  $z_{\beta_2}$  es la distribución normal estándar inversa para un nivel de servicio preestablecido  $\beta_2$ . Las proposiciones 1, 3 y 4 en conjunto con los niveles de servicio preestablecido para cada clase de demanda  $\beta_i$ , inducen dos situaciones en la relación entre  $r_2^0$  y  $r_1^0$ . La figura 2 muestra los dos casos posibles.

En la figura (2a) la diferencia entre los niveles de servicio preestablecidos es lo suficientemente amplia para que  $r_2^0 < r_1^0$ , mientras que en la figura (2b) la diferencia entre los niveles de servicio preestablecidos es tan pequeña que  $r_2^0 > r_1^0$ . Una forma simple de discriminar si estamos en el caso 1 o 2 es evaluar numéricamente  $sl_1(r_2^0, 0)$ . Luego, si  $sl_1(r_2^0, 0) < \beta_1$  estamos en el caso 1 y si  $sl_1(r_2^0, 0) \geq \beta_1$  estamos en caso 2. El método propuesto en este paper para resolver el problema SLP en forma exacta depende del caso en que estemos.

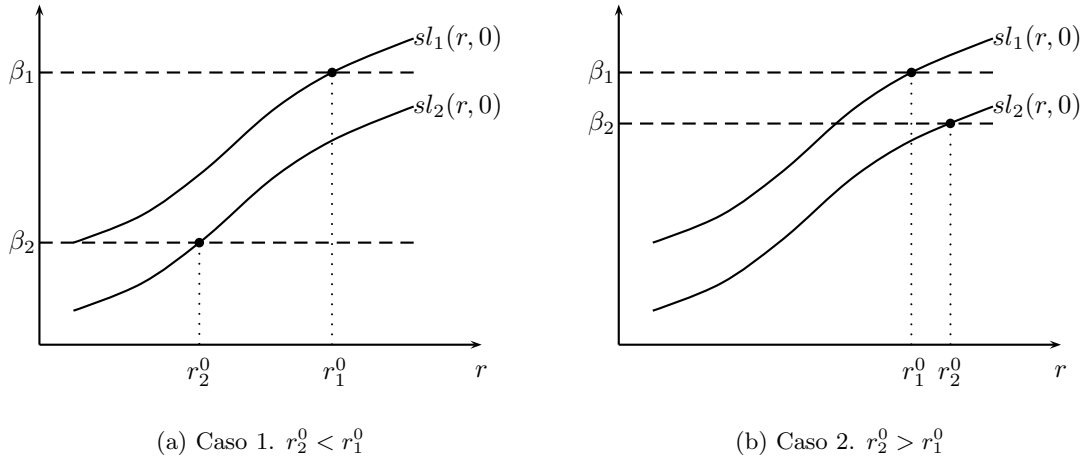


Figura 2: Casos posibles para la relación  $r_2^0, r_1^0$

**Proposición 5.** Si  $sl_1(r_2^0, 0) < \beta_1$ , los parámetros óptimos de la política de nivel-crítico se obtienen del siguiente sistema de ecuaciones:

$$r^* - C^* = \mu L + z_{\beta_2} \sigma \sqrt{L} \quad (16)$$

$$\int_0^L \mathbb{P}(D_1(L - \tau) \leq C^*) f_H(\tau) d\tau = \beta_1 - \beta_2 \quad (17)$$

y los niveles de servicio provistos a cada clase son iguales a sus niveles preestablecidos, i.e.,  $sl_i(r^*, C^*) = \beta_i, i = 1, 2$ .

*Proof.* Sea  $C_2^r$  el máximo nivel crítico, dado un punto de reorden  $r$ , que garantiza un nivel de servicio  $\beta_2$ , i.e.,  $C_2^r = \max\{C \mid sl_2(r, C) \geq \beta_2\}$ . De la proposición 1 se deriva que  $C_2^r$  es solución de  $sl_2(r, C) = \beta_2$  y que  $C_2^r$  es creciente en  $r$ . De la misma forma se define  $C_1^r$  como el mínimo nivel crítico, dado un punto de reorden  $r$ , que garantiza un nivel de servicio  $\beta_1$ , i.e.,  $C_1^r = \min\{C \mid sl_1(r, C) \geq \beta_1\}$ . De la proposición 3 se deriva que  $C_1^r$  es solución de  $sl_1(r, C) = \beta_1$  y que  $C_1^r$  es decreciente en  $r$ . Como  $C_2^r$  es creciente en  $r$  y  $C_1^r$  es decreciente en  $r$ , el punto de reorden óptimo  $r^*$  se produce cuando  $C_2^r = C_1^r = C^*$ . Luego, cuando  $sl_1(r_2^0, 0) < \beta_1$ , los parámetros óptimos de la política de nivel crítico  $(r^*, C^*)$ , se obtienen del sistema de ecuaciones formado por  $sl_1(r, C) = \beta_1$  y  $sl_2(r, C) = \beta_2$ .  $\square$

Nótese que el *hitting time*, ec.(7), solo depende de la diferencia  $(r - C)$ . Por lo tanto, dada la ec.(16), la ec.(17) solo depende de  $C^*$ .

**Proposición 6.** Si  $sl_1(r_2^0, 0) \geq \beta_1$ , los parámetros óptimos de la política de nivel-crítico son

$$C^* = 0 \quad (18)$$

$$r^* = \mu L + z_{\beta_2} \sigma \sqrt{L} \quad (19)$$

y los niveles de servicio provistos a cada clase son:  $sl_1(r^*, 0)$  y  $sl_2(r^*, C^*) = \beta_2$  para la clase de alta y baja prioridad respectivamente.

*Proof.* Como  $sl_1(r, C)$  es creciente en  $C$  y  $sl_2(r, C)$  es decreciente en  $C$ , cuando  $r_2^0 \geq r_1^0$ , el mínimo valor del punto de reorden que garantiza un nivel de servicio provisto  $\beta_1$  a la clase de alta prioridad y un nivel de servicio provisto  $\beta_2$  a la clase de baja prioridad es  $r_2^0$ . Luego,  $r^* = r_2^0 = \mu L + z_{\beta_2} \sigma \sqrt{L}$  y  $C^* = 0$ .  $\square$

Una consecuencia relevante de la proposición 6 es que si  $sl_1(r_2^0, 0) > \beta_1$ , el nivel de servicio provisto a la clase de alta prioridad será mayor a su nivel preestablecido, i.e.,  $sl_1(r^*, 0) > \beta_1$ .

4. ESTUDIO COMPUTACIONAL

El estudio computacional fue desarrollado con los siguientes objetivos, (i) comprobar la validez del método propuesto en este trabajo para obtener los parámetros óptimos de la política de nivel-crítico; (ii) evaluar el desempeño de la política de nivel-crítico respecto a la política de inventarios separados y *Round-up* y (iii) validar los supuestos realizados en la sección 2 respecto al valor esperado del inventario a la mano. Para comprobar la valides del método propuestos se comparan los resultados de estos con los obtenidos al programar el modelo (11)-(14) en lenguaje AMPL haciendo uso del solver MINOS 5.5 y utiliza como cota inferior  $r^l = r_2^0 = \mu L + z_{\beta_2} \sigma \sqrt{L}$  y  $C^l = 0$ . Al implementar la ec.(10) en lenguaje AMPL la integral se discretizó en  $100 * L$  intervalos y las funciones de distribución presentes en las restricciones (12) y (13) se programaron a través de la función *gsl\_cdf\_ugaussian\_P()*. El sistema de ecuaciones (16)-(17) fue resuelto con Mathematica 8.0. Por otro lado, para validar los supuestos sobre el valor esperado del inventario a la mano, se desarrolló una simulación en lenguaje de programación C. Para cada simulación se realizan 100 replicas de 1000 ciclos de reabastecimiento.

Para cubrir un amplio rango de datos, se generó un conjunto de 32 problemas. Se definió un caso base con  $\beta_1 = 0.95$ ,  $\beta_2 = 0.75$ , demanda normalmente distribuida con medias  $\mu_1 = \mu_2 = 5$  y varianzas  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 5$ , y lead time  $L = 60$ . Luego, se varían estos parámetros y se analiza su impacto sobre el punto de reorden óptimo  $r^*$ , nivel crítico óptimo  $C^*$  y niveles de servicio provistos.

4.1. Resultados experimentales oara la solucion exacta

Los parámetros óptimos de la política de nivel-crítico resultaron ser los mismos al resolver el problema SLP con el modelo programado en AMPL y a través del método propuesto en este paper (proposición 5 y 6). La tabla 1 indica los parámetros de cada experimento, valores óptimos y los resultados de la simulación.

Parámetros							Solución Óptima					Simulación					
$\beta_1$	$\beta_2$	$\mu_1$	$\sigma_1^2$	$\mu_2$	$\sigma_2^2$	$L$	$r^*$	$C^*$	$sl_1$	$sl_2$	$sl_1(r_2^0, 0)$	$Q$	$B_1$	$B_2$	$OH$	$sl_1$	$sl_2$
0.95	0.75	5	5	5	5	60	627.543	11.022	0.950	0.750	0.773	1500	0.015	0.002	777.708	0.948	0.758
0.90	0.75	5	5	5	5	60	623.216	6.694	0.900	0.750	0.773	1500	0.016	0.005	773.324	0.898	0.755
0.80	0.75	5	5	5	5	60	617.842	1.320	0.800	0.750	0.773	1500	0.015	0.012	767.913	0.802	0.756
0.95	0.70	5	5	5	5	60	625.694	12.849	0.950	0.700	0.725	1500	0.023	0.002	775.605	0.941	0.703
0.95	0.65	5	5	5	5	60	623.992	14.554	0.950	0.650	0.677	1500	0.028	0.002	774.056	0.943	0.653
0.95	0.55	5	5	5	5	60	620.855	17.777	0.950	0.550	0.579	1500	0.042	0.002	770.823	0.944	0.552
0.95	0.75	10	5	5	5	60	930.708	14.187	0.950	0.750	0.772	2500	0.007	0.002	1280.803	0.943	0.767
0.95	0.75	15	5	5	5	60	1232.023	15.501	0.950	0.750	0.777	2500	0.005	0.002	1282.128	0.942	0.768
0.95	0.75	25	5	5	5	60	1832.762	16.240	0.950	0.750	0.789	2500	0.003	0.002	1282.910	0.941	0.786
0.95	0.75	5	15	5	5	60	639.484	16.119	0.950	0.750	0.780	1500	0.031	0.005	789.587	0.942	0.746
0.95	0.75	5	25	5	5	60	648.713	20.097	0.950	0.750	0.785	1500	0.044	0.009	798.798	0.941	0.745
0.95	0.75	5	45	5	5	60	663.445	26.501	0.950	0.750	0.792	1500	0.077	0.017	812.129	0.929	0.723
0.95	0.75	5	5	10	5	60	923.776	7.254	0.950	0.750	0.783	2500	0.013	0.001	1273.840	0.949	0.754
0.95	0.75	5	5	15	5	60	1221.855	5.334	0.950	0.750	0.793	2500	0.015	0.001	1271.924	0.950	0.758
0.95	0.75	5	5	25	5	60	1819.904	3.383	0.950	0.750	0.811	2500	0.017	0.001	1269.739	0.959	0.765
0.95	0.75	5	5	5	15	60	638.945	15.580	0.950	0.750	0.766	1500	0.035	0.004	789.121	0.946	0.751
0.95	0.75	5	5	5	25	60	647.608	18.992	0.950	0.750	0.764	1500	0.053	0.005	798.010	0.948	0.749
0.95	0.75	5	5	5	45	60	661.197	24.253	0.950	0.750	0.761	1500	0.090	0.007	811.842	0.951	0.750
0.95	0.75	5	5	5	5	70	729.695	11.850	0.950	0.750	0.773	1500	0.018	0.002	779.592	0.947	0.754
0.95	0.75	5	5	5	5	80	831.690	12.612	0.950	0.750	0.773	1500	0.021	0.003	781.481	0.942	0.749
0.95	0.75	5	5	5	5	100	1035.317	13.987	0.950	0.750	0.773	1500	0.026	0.003	785.375	0.941	0.755
0.80	0.75	5	15	20	5	60	1523.365	0.000	0.811	0.750	0.811	3000	0.027	0.007	1523.161	0.818	0.751
0.75	0.70	5	25	15	5	60	1222.248	0.000	0.764	0.700	0.764	2500	0.056	0.023	1272.456	0.760	0.704
0.65	0.60	5	5	20	5	60	1506.206	0.000	0.666	0.600	0.666	3000	0.029	0.006	1506.143	0.650	0.614

Tabla 1: Resultados numericos para solución óptima

Los resultados numéricos de la tabla 1 permiten comprobar que cuando  $sl_1(r_2^0, 0) > \beta_1$ , el nivel crítico óptimo es cero, i.e.,  $C^* = 0$  y el nivel de servicio provisto a la clase de alta prioridad es mayor que su nivel de servicio preestablecido, i.e.,  $sl_1(r^*, C^*) = sl_1(r_2^0, 0) > \beta_1$ .

Una vez obtenido el punto de reorden óptimo  $r^*$  y nivel crítico óptimo  $C^*$  a través del proceso de optimización, y dado un lote de reabastecimiento  $Q$ , se procede a simular el comportamiento del inventario. Según los resultados indicados en la tabla 1, se puede comprobar que el valor promedio de los backorders



de largo plazo para cada clase  $\bar{B}_i$ ,  $i = 1, 2$ , es despreciable en comparación al valor promedio del inventario a la mano de largo plazo  $\bar{OH}$ . Esto valida el supuesto realizado en la sección 2 y que permitió formular el modelo (2)-(5). Por otro lado, en la simulación se computo el nivel promedio de servicio provisto para cada clase  $\bar{s}l_i$ ,  $i = 1, 2$ . Según los resultados de la tabla 1, el punto de reorden óptimo  $r^*$  y nivel crítico óptimo  $C^*$  inducen en la simulación a niveles de servicio provistos muy cercanos a los obtenidos en el proceso de optimización, i.e.,  $\bar{s}l_i \approx sl_i(r^*, C^*)$ ,  $i = 1, 2$ . La máxima diferencia entre  $sl_1(r^*, C^*)$  y  $\bar{s}l_1$  es 2% cuando la varianza de clase 1 es 45.

4.2. Comparación entre diferentes políticas

En los experimentos desarrollados, el punto de reorden obtenido por medio del método exacto es menor que los obtenidos bajo las políticas *Round-up* y *Separate Stock*, i.e.,  $r^* < r_{round-up}$  y  $r^* < r_{separate}$ . Esto implica, al menos para el set de experimentos presentados, que la política de nivel-crítico tiene el mejor desempeño cuando el sistema de control de inventarios debe proveer niveles de servicio diferenciados a dos clases de demanda. La tabla 2 presenta los puntos de reorden óptimos obtenidos por medio de diferentes políticas utilizadas cuando el sistema de inventarios debe proveer niveles de servicio diferenciado.

Parámetros								Punto de reorden óptimo		
$\beta_1$	$\beta_2$	$\mu_1$	$\sigma_1^2$	$\mu_2$	$\sigma_2^2$	$L$	Round up Policy	Separate Stock Policy	Critical level policy	
<b>0.95</b>	0.75	5	5	5	5	60	640.291	640.172	620.575	
<b>0.90</b>	0.75	5	5	5	5	60	631.391	633.880	620.084	
<b>0.80</b>	0.75	5	5	5	5	60	620.615	626.260	619.489	
0.95	<b>0.70</b>	5	5	5	5	60	640.291	637.573	617.692	
0.95	<b>0.65</b>	5	5	5	5	60	640.291	635.164	615.121	
0.95	<b>0.55</b>	5	5	5	5	60	640.291	630.666	610.590	
0.95	0.75	<b>10</b>	5	5	5	60	940.291	940.172	920.871	
0.95	0.75	<b>15</b>	5	5	5	60	1240.291	1240.172	1221.019	
0.95	0.75	<b>25</b>	5	5	5	60	1840.291	1840.172	1821.195	
0.95	0.75	5	<b>15</b>	5	5	60	656.979	661.028	630.419	
0.95	0.75	5	<b>25</b>	5	5	60	669.785	675.387	638.085	
0.95	0.75	5	<b>45</b>	5	5	60	690.092	697.152	650.481	
0.95	0.75	5	5	<b>10</b>	5	60	940.291	940.172	919.617	
0.95	0.75	5	5	<b>15</b>	5	60	1240.291	1240.172	1219.096	
0.95	0.75	5	5	<b>25</b>	5	60	1840.291	1840.172	1818.530	
0.95	0.75	5	5	5	<b>15</b>	60	656.979	648.724	628.505	
0.95	0.75	5	5	5	<b>25</b>	60	669.785	654.613	634.535	
0.95	0.75	5	5	5	<b>45</b>	60	690.092	663.537	644.024	
0.95	0.75	5	5	5	5	<b>70</b>	743.519	743.391	722.149	
0.95	0.75	5	5	5	5	<b>80</b>	846.523	846.387	823.612	
0.95	0.75	5	5	5	5	<b>100</b>	1052.015	1051.862	1026.281	
<b>0.80</b>	0.75	5	<b>15</b>	<b>20</b>	5	60	1529.155	1536.931	1525.955	
<b>0.75</b>	<b>0.70</b>	5	<b>25</b>	<b>15</b>	5	60	1228.616	1235.206	1226.442	
<b>0.65</b>	<b>0.60</b>	5	5	<b>20</b>	5	60	1509.438	1511.062	1508.157	

Tabla 2: Comparación del punto de reorden entre diferentes políticas de inventarios

5. CONCLUSIONES

En este artículo se analizó la política de nivel crítico constante cuando el racionamiento obedece a la presencia de dos clases de demanda y el sistema de inventario opera bajo una política de reabastecimiento  $(Q, r)$  de revisión continua, full-backorder, lead time determinístico y la distribución de la demanda es continua. La priorización de clase se realiza en base al nivel de servicio tipo 1 y el sistema de inventario se modelada a través del *hitting time*. Dado el mecanismo de priorización de clase, se plantea un problema de nivel de servicio para determinar los parámetros óptimos de la política de nivel crítico. Basado en propiedades estructurales de las restricciones de nivel de servicio se desarrolló un algoritmo de solución óptima. Se comparó el desempeño de la política de nivel crítico con otras políticas que permiten proveer niveles de servicio diferenciado como son la política de inventarios separados y la política *round-up*.

Los resultados estructurales permiten demostrar que si la diferencia entre los niveles de servicio preestablecidos es lo suficientemente amplia, los parámetros óptimos de la política permiten satisfacer estos niveles en forma exacta. Por el contrario, para satisfacer el nivel de servicio preestablecido para la clase de menor prioridad, cuando la diferencia entre los niveles de servicio preestablecidos para cada clase es lo suficientemente pequeña, se tendrá que ofertar a la clase de alta prioridad un nivel de servicio mayor a su nivel preestablecido. Los resultados numéricos demostraron que la política de nivel crítico tiene mejor desempeño que las políticas *separate stock* y *round-up*. Por otro lado, la simulación permitió comprobar que los backorders de largo plazo son despreciables respecto al inventario a la mano de largo plazo.

Como posibles extensiones de este trabajo se propone: (i) expandir los resultados a más de dos clases; (ii) utilizar el *fill-rate* o *ready rate* como medidas de nivel de servicio; (iii) expandir los resultados a otras distribuciones continuas para modelar la demanda y (iv) relajar el supuesto de lead time determinístico.

## Referencias

- [1] Y. Wang, S. Zhang, L. Sun, Anticipated rationing policy for two demand classes under service level constraints, *Computers and industrial Engineering* 23 (2013) 1200–1212.
- [2] K. Möllering, U. Thonemann, An optimal constant level rationing policy under service level constraints, *OR Spectrum* 32 (2010) 319–341.
- [3] M. Kleijn, R. Dekker, An overview of inventory systems with several demand classes, *Econometric Institute Report 9838/A*, Erasmus University, Rotterdam, The Netherlands.
- [4] R. Teunter, W. Haneveld, Dynamic inventory rationing strategies for inventory systems with two demand classes, poisson demand and backordering, *European Journal of Operational Research* 190 (2008) 156–178.
- [5] S. Nahmias, C. Demmy, Operating characteristics of an inventory system with rationing, *Management Science* 27 (1981) 1236–1245.
- [6] I. Moon, S. Kang, Rationing policies for some inventory systems, *Journal of Operations Research Society* 49 (1998) 509–518.
- [7] P. Melchior, R. Dekker, M. Kleijn, Inventory rationing in an (s,q) inventory model with lost sales and two demand classes, *Journal of the Operational Research Society* 51 (2000) 111–122.
- [8] K. S. Isotupa, An (s,q) markovian inventory system with lost sales and two demand classes, *Mathematical and Computer Modelling* 43 (2006) 687–694.
- [9] H. Tempelmeier, Supply chain inventory optimization with two customers class in discrete time, *European Journal of Operational Research* (2006) 600–621.
- [10] V. Deshpande, M. Cohen, K. Donohue, A threshold inventory rationing policy for service differentiated demand classes, *Management Science* 49 (2003) 683–703.
- [11] H. Arslan, S. Graves, T. Roemer, A single-product inventory model for multiple demand classes, *Management Science* 53 (2007) 1486–1500.
- [12] D. Wang, O. Tang, J. Huo, A heuristic for rationing inventory in two demand classes with backlog cost and service constraint, *Computers and Operations Research Accepted Manuscript*.
- [13] R. Dekker, R. Hill, M. Kleijn, R. Teunter, On the (s-1,s) lost sales inventory model with priority demand classes, *Naval Research Logistics* 49 (2002) 593–610.
- [14] S. Axsäter, Using the deterministic eoq formula in stochastic inventory control, *Management Science* 42 (1996) 830–834.