

Algunos avances sobre códigos de identificación en ciclos

Silvia Bianchi, Yanina Lucarini, and Paola Tolomei*

Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,
Universidad Nacional de Rosario, 2000 Rosario, Santa Fe, Argentina
{sbianchi, lucarini, ptolomei}@fceia.unr.edu.ar

Resumen En este trabajo nos ocupamos de los códigos de identificación en ciclos. En particular, estudiamos los r -códigos de identificación de los ciclos C_n donde $\text{mcd}(2r+1, n) = 1$ y n impar, que son los casos no resueltos por S. Gravier et al. en [1]. Mostramos que para $n \geq 8r+3$, si $n = k(2r+1) + 1$ entonces $m_r(C_n) = \frac{n+1}{2} + 1$ y, si $n = k(2r+1) + r$ entonces $m_r(C_n) = \frac{n+1}{2}$. Más aún, damos a conocer r -códigos de identificación con estos tamaños en cada caso.

1. Introducción

Consideremos $G = (V, E)$ un grafo no dirigido simple donde V es el conjunto de vértices de G y E es el conjunto de aristas. Si u y v son dos vértices de G , una arista entre u y v es denotada por (u, v) . Dos vértices u y v de un grafo G son llamados *vecinos* si ellos están conectados por una arista en G .

Diremos que $T \subseteq V$ es un *transversal* de G si todas las aristas en E son incidentes en al menos un vértice $v \in T$.

Un *camino* de longitud k en G entre dos vértices u y v es una secuencia de $k+1$ vértices de G $\{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k\}$ tal que si $u = v_0$ y $v = v_k$, para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$ la arista $(v_i, v_{i+1}) \in E$. La *distancia* entre dos vértices u y v en un grafo G , denotada como $d(u, v)$, es la menor longitud de un camino entre u y v en G . Si tal camino no existe, luego la distancia entre u y v no está definida. Si $u = v$ entonces definimos $d(u, v) = 0$.

Sea v un vértice de G y $r \in \mathbb{N}$, denotamos con $B_r(v)$ a la *bola* de radio r y centro v , esto es $B_r(v) = \{w \in V : d(w, v) \leq r\}$. Claramente $v \in B_r(v)$.

Diremos que dos vértices u y v son *r -vecinos* si existe $w \in V$ tal que $u, v \in B_r(w)$.

Un *ciclo de longitud n* en G es una secuencia de n vértices distintos de G tales que para todo $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$, $(i, j) \in E$ si y sólo si $j = i+1 \pmod{n}$.

Sea $C \subseteq V$, para cada vértice $v \in V$, decimos que el conjunto C *r -cubre* a v si y sólo si $B_r(v) \cap C \neq \emptyset$. Al conjunto $B_r(v) \cap C$ se lo denomina *conjunto de identificación* de v . Diremos que C *r -separa* dos vértices distintos u y v si y sólo si $B_r(u) \cap C \neq B_r(v) \cap C$.

Un *r -código de identificación* de G es un conjunto $C \subseteq V$ que *r -cubre* todos los vértices de G y que *r -separa* cualquier par de vértices distintos de G .

Denotamos con Δ la diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B , es decir $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Observemos que dos vértices distintos u y v están *r -separados* si y sólo

* Trabajo parcialmente financiado por proyecto de investigación PID 19/I305 *Problemas de cubrimiento y empaquetamiento de conjuntos*. Universidad Nacional de Rosario

si algún vértice de C pertenece a $B_r(u) \Delta B_r(v)$, o equivalentemente $(B_r(u) \Delta B_r(v)) \cap C \neq \emptyset$.

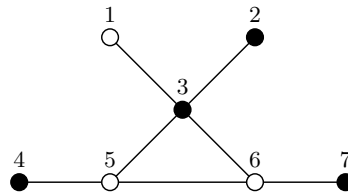
No todos los grafos admiten un r -código de identificación. Una condición necesaria y suficiente para esto es que todo par de vértices distintos u y v verifiquen $B_r(u) \neq B_r(v)$, si esta condición se cumple es claro que V es en si mismo un r -código de identificación.

Llamaremos $m_r(G)$ al mínimo cardinal de un r -código de identificación de G .

El concepto de código de identificación fue introducido en 1998 por M.G. Karpovsky et al. en [8], dando origen a varias publicaciones en la actualidad. El problema de determinar el mínimo código de identificación en un grafo es NP-Completo (ver [5]), y se han estudiado los códigos de identificación sobre algunas clases particulares de grafos (ver [1], [2], [4], [7]).

Una primera aplicación donde tiene utilidad el problema de encontrar un mínimo r -código de identificación es diagnosticar fallas en un sistema de procesadores. Consideremos una red de procesadores modelada por un grafo no dirigido. Algunos de los procesadores son capaces de detectar y dar algún tipo de alarma si algún procesador r -vecinos es defectuoso. Si estos procesadores de prueba detectan un error, el procesador que falla será aquel cuyo conjunto de identificación coincida con el conjunto de procesadores que han detectado la falla. Pero si algún conjunto de identificación resultara el mismo para más de un procesador, sería imposible determinar donde se ha producido el error. En el caso de redes que utilizan miles de procesadores es fundamental minimizar el conjunto de procesadores de prueba (ver [8]).

Ejemplo 1. Consideremos el siguiente grafo el cual representa una red de 7 procesadores:



Sea $C = \{2, 3, 4, 7\}$ el conjunto de procesadores de prueba y supongamos que pueden detectar fallas en sus vecinos o en ellos mismos. Es fácil ver que cubren a todos los nodos de la red. Observemos que si falla el procesador 2, los procesadores que dan algún tipo de alarma serán 2 y 3 o bien el conjunto de identificación del nodo 2 es $B_1(2) \cap C = \{2, 3\}$. Además vale que $B_1(v) \cap C \neq \{2, 3\}$ para cualquier $v \in V \setminus \{2\}$. Se puede ver fácilmente que esta condición se verifica para cada nodo del grafo en el ejemplo 1, con lo cual C es un 1-código de identificación.

2. Preliminares

En lo que sigue vamos a trabajar con r -códigos de identificación sobre una clase particular de grafos que son los *ciclos de n vértices*, los cuales denotamos por C_n . En

esta sección nos ocuparemos de definir algunos conceptos que serán de utilidad para obtener nuevos resultados acerca de r -códigos de identificación sobre C_n , y vamos a enumerar los resultados obtenidos hasta el momento en este tipo de grafos.

Es fácil ver que si $n \leq 2r + 1$ entonces no existe un r -código de identificación posible en C_n .

Observación 1. Sea $r \geq 1$, $n \geq 4r + 1$, $n \in \mathbb{N}$ y C un r -código de identificación de $C_n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ tenemos que $B_r(i) \Delta B_r(i + 1) = \{i - r, i + 1 + r\}$. Luego uno de los vértices $i - r$ o $i + 1 + r$ debe pertenecer a C . Más aún, si i, j son vértices de C_n tales que $j = i + t$ con $1 \leq t \leq 2r$, entonces se tiene que $\{i - r, j - r - 1, i + r + 1, j + r\} \subset B_r(i) \Delta B_r(j)$.

Esta observación motiva la siguiente definición:

Definición 1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $r \geq 1$. Denotamos con $C_{(n,r)}^*$ al grafo cuyo conjunto de vértices es \mathbb{Z}_n y el conjunto de aristas está dado por $E = \{(i - r, i + 1 + r) : i \in \mathbb{Z}_n\}$ donde las sumas indicadas son módulo n .

Luego todo r -código de identificación de C_n , debe cubrir todas las aristas de $C_{(n,r)}^*$, o equivalentemente todo r -código de identificación de C_n es un transversal de $C_{(n,r)}^*$.

Por lo tanto el mínimo cardinal de un transversal de $C_{(n,r)}^*$ es una cota inferior de $m_r(C_n)$.

Además si $a = \text{mcd}(2r + 1, n)$ y $n' = \frac{n}{a}$, $C_{(n,r)}^*$ consiste en la unión disjunta de a ciclos de n' vértices.

Siguiendo la notación dada, los resultados obtenidos por S. Gravier et al. en [1] se resumen en el siguiente Teorema.

- Teorema 1.**
1. $m_r(C_n) = \frac{n}{2}$ para todo $r \geq 1$ y $n \geq 2r + 4$, n par.
 2. $m_r(C_{2r+2}) = 2r + 1$ para todo $r \geq 1$.
 3. $m_1(C_5) = 3$.
 4. $m_1(C_n) = \frac{n+1}{2} + 1$ para todo $n \geq 7$, n impar.
 5. $m_r(C_{2r+3}) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ para todo $r \geq 1$.
 6. $m_r(C_n) = \frac{n+1}{2} + r$ para todo $r \geq 1$, $n \geq 2r + 3$ tal que $\text{mcd}(2r + 1, n) = 2r + 1$ y n impar.
 7. $m_r(C_n) = \text{mcd}(2r + 1, n) \left\lceil \frac{n}{2\text{mcd}(2r+1, n)} \right\rceil$ para todo $r \geq 1$, $n \geq 3r + 2$, n impar tal que $\text{mcd}(2r + 1, n) \neq 1$.
 8. $m_r(C_n) = \text{mcd}(2r + 1, n) \left\lceil \frac{n}{2\text{mcd}(2r+1, n)} \right\rceil$ para todo $r \geq 1$, n impar tal que $3r + 2 \leq n \leq 4r + 1$.
 9. $m_r(C_n) = \frac{n+1}{2}$ para todo $r \geq 1$ y n impar tal que $4r + 5 \leq n \leq 8r + 1$ y $\text{mcd}(2r + 1, n) = 1$.
 10. $m_r(C_{4r+3}) = 2r + 3$.
 11. $\frac{n+1}{2} + \frac{\text{mcd}(2r+1, n) - 1}{2} \leq m_r(C_n) \leq \frac{n+1}{2} + r$ para todo $r \geq 1$, $n \geq 2r + 3$ y n impar.

De acuerdo a los resultados conseguidos en [1] se observa que la mayor incertidumbre yace en los casos en que $\text{mcd}(2r + 1, n) = 1$ y n es impar (apartado 11), para los cuales se sabe que las cotas superiores difieren de las inferiores en r .

4 Códigos de identificación en ciclos

Los autores en [1] se preguntan cuántos nodos es necesario agregar a un transversal del grafo $C_{(n,r)}^*$ para conseguir un r -código de identificación.

En este trabajo continuamos con el estudio de los r -códigos de identificación sobre ciclos C_n , con el objetivo de dar respuesta a la pregunta abierta de S. Gravier et al. en [1].

3. r -código de identificación en ciclos de n nodos

A continuación estudiaremos los r -códigos de identificación en C_n cuando n es impar y $\text{mcd}(2r+1, n) = 1$. Vamos a separar el análisis en los siguientes casos:

- **Caso 1:** $n = (2r+1)k+1$, $k \geq 4$.
Observemos que si $n = (2r+1)k+1$ y n impar entonces k es par. Si $k=2$, $n=4r+3$ y para este caso se conoce $m_r(C_{4r+3}) = 2r+3$ (ver Teorema 1 ítem 10). Luego en este trabajo consideramos $k \geq 4$, de donde resulta $n \geq 8r+3$, que es uno de los casos que todavía no se ha resuelto en su totalidad.
- **Caso 2:** $n = (2r+1)k+r$.
Observemos que si n es impar entonces r y k deben tener distinta paridad.

Ya hemos mencionado que $V(C_{(n,r)}^*) = \mathbb{Z}_n$, más aún como los casos que consideramos cumplen la condición $\text{mcd}(n, r) = 1$ podemos describir el ciclo $C_{(n,r)}^*$ desde 0 como sigue

$$C_{(n,r)}^* = \{\ell(2r+1) : \ell = 0, 1, \dots, (2r+1)k\}.$$

A continuación sea $T \subseteq \mathbb{Z}_n$ un transversal sobre $C_{(n,r)}^*$ que se define de la siguiente manera:

$$T = \{\ell(2r+1) : \ell \text{ par}, \ell = 0, 1, \dots, (2r+1)k\}.$$

Observemos que los únicos vértices consecutivos en $C_{(n,r)}^*$ que pertenecen a T son 0 y $n-2r-1$.

Los resultados obtenidos con respecto a los casos mencionados son los siguientes.

Teorema 2. Sea C_n un ciclo con $n = (2r+1)k+1$, $k \geq 4$ y n impar y

$$T = \{\ell(2r+1) : \ell \text{ par}, \ell = 0, 1, \dots, (2r+1)k\}.$$

Si $a_i = r+1 + (i-1)(2r+1)$ con $i = 1, \dots, k$ entonces $C = (T \setminus \{a_i : i \text{ par}\}) \cup \{a_i : i \text{ impar}\}$, es un r -código de identificación de C_n . Más aún, $m_r(C_n) = \frac{n+1}{2} + 1$.

Demostración. De acuerdo a lo observado en el Caso 1 resulta k par, $k \geq 4$.

Si $T = \{\ell(2r+1) : \ell \text{ par}, \ell = 0, 1, \dots, (2r+1)k\}$ entonces vale $|T| = (2r+1)\frac{k}{2} + 1$.

Llamamos $S_i = B_r(a_i)$ con $i = 1, \dots, k$.

Veamos que $T = \left(\bigcup_{j=1}^{\frac{k}{2}} S_{2j} \right) \cup \{0\}$.

Ver Figura 1 como ejemplo ilustrativo.

Es claro que $\left| \left(\bigcup_{j=1}^{\frac{k}{2}} S_{2j} \right) \cup \{0\} \right| = (2r+1)\frac{k}{2} + 1$, luego para probar la igualdad, mostraremos que $T \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{\frac{k}{2}} S_{2j} \right) \cup \{0\}$.

Para ello, comenzaremos probando que si $i \in S_1$ entonces $i \notin T$. O equivalentemente, si $1 \leq i \leq 2r+1$, $\alpha^i(2r+1) \equiv i \pmod{n}$ con α^i impar, $0 \leq \alpha^i \leq (2r+1)k$.

Esta última equivalencia se puede comprobar fácilmente tomando $\alpha^i = (2r+1-i)k+1$.

De esta manera resulta $S_1 \cap T = \emptyset$. Luego, de acuerdo a la definición de T , $S_2 \subset T$. Aplicando iterativamente este razonamiento, queda probada la igualdad.

Observemos que T no es un r -código de identificación de C_n pues el vértice $r+1$ no está cubierto. Mostraremos a continuación que no es posible encontrar $i, j \in \mathbb{Z}_n$ tal que $\tilde{T} = T \setminus \{i\} \cup \{j\}$ sea un transversal, cubra todos los vértices de C_n y $|\tilde{T}| = |T|$.

Sea $i \in T$.

Supongamos $i \neq 0, i \neq (k-1)(2r+1)+1$. $T \setminus \{i\}$ no cubre las aristas $(i, i+2r+1)$, $(i-2r-1, i)$ porque $i-2r-1 \notin T$ y $i+2r+1 \notin T$, luego no es posible encontrar $j \in \mathbb{Z}_n$ que cumpla con las condiciones impuestas.

Ahora supongamos $i = 0$. Sabemos que $(k-1)(2r+1)+1 \in T$ es consecutivo a 0 en $C_{((2r+1)k+1, r)}^*$. Ahora bien, $T \setminus \{0\}$ no cubre a la arista $(0, 2r+1)$, entonces $j = 2r+1$. Luego, $B_r(r) \cap \tilde{T} = \emptyset$, es decir r no está cubierto.

Idéntico razonamiento se aplica a $i = (k-1)(2r+1)+1$.

Siendo C un r -código de identificación de $C_{(2r+1)k+1}$, hemos demostrado entonces que $|C| \geq |T| + 1$.

Veamos cómo construir C a partir del transversal T .

Definimos:

$$C = (T \setminus \{a_i : i \text{ par}\}) \cup \{a_i : i \text{ impar}\}.$$

A modo de ilustración, ver Figura 2.

Probaremos que C es un r -código de identificación.

Es fácil ver que C es un transversal de $C_{((2r+1)k+1, r)}^*$. Por lo tanto, todos los vértices de $C_{(2r+1)k+1}$ están r -separados.

Observemos que $S_i \cap C \neq \emptyset$ para todo i par y $S_i \cap C = \{(r+1) + (i-1)(2r+1)\}$ para todo i impar. Luego, todos los vértices de $C_{(2r+1)k+1}$ están r -cubiertos por C .

Por lo tanto, podemos concluir que C es un r -código de identificación y $|C| = |T| + 1 = \left(\frac{k}{2}(2r+1) + 1\right) + 1 = \frac{n+1}{2} + 1$. \square

Teorema 3. Sean C_n un ciclo con $n = (2r+1)k+r$, r par y

$$T = \{\ell(2r+1) : \ell \text{ par}, \ell = 0, \dots, (2r+1)k+r-1\}.$$

Entonces, T es un r -código de identificación. Más aún, $m_r(C_n) = \frac{n+1}{2}$.

Demostración. Sea T de acuerdo al enunciado. Por definición, T es un transversal de $C_{(n, r)}^*$.

Como $n = (2r+1)k+r$ es impar y r par, luego k es impar.

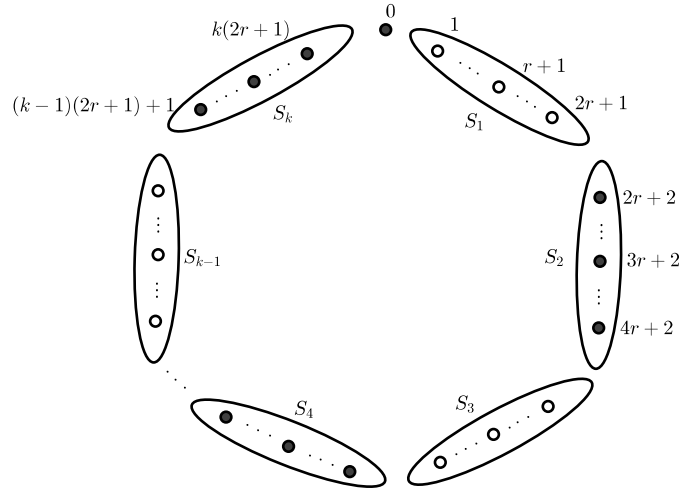


Figura 1. $V(C_{(k(2r+1)+1,r)}^*)$, donde los nodos pintados en negro representan los elementos del transversal T . Como se puede observar, T está formado por el 0 y la unión de los conjuntos S_i con $i = 1, \dots, k$, i par.

Sean, para $i = 1, \dots, k$, $S_i = \{(i-1)(2r+1), \dots, i(2r+1) - 1\}$ y R el conjunto dado por $\{k(2r+1), \dots, k(2r+1) + r - 1\}$. Es fácil ver que $\mathbb{Z}_n = \bigcup_{i=1}^k S_i \cup R$.

Veamos que todos los vértices de C_n están r -cubiertos.

Dado que $0 \in T$, los vértices en R están r -cubiertos.

Veamos que $r \in T$, basta con observar que $r \equiv (2rk+r)(2r+1) \pmod{n}$.

Ahora bien, por definición de T podemos concluir que $r + (2r+1)l \in T$ con l par y $0 \leq l \leq k-1$; y como vale que $B_r(r + (2r+1)i) = S_{i+1}$ cuando $0 \leq l \leq k-1$ entonces los vértices pertenecientes a S_i con $i = 1, \dots, k$ con k impar están r -cubiertos.

Para terminar la prueba observemos que $(i-1)(2r+1) \in T$ cuando $i = 1, \dots, k$ e i es impar. Además $3r \equiv (2k(r-1) + r)(2r+1) \pmod{n}$ y sigue que $3r \in T$. Esto implica que $3r + \ell(2r+1) \in T$ para ℓ par. Sigue que los vértices en S_i con i par están r -cubiertos. \square

Teorema 4. Sean C_n un ciclo con $n = (2r+1)k + r$, r impar y

$$T = \{\ell(2r+1) : \ell \text{ par}, \ell = 0, \dots, (2r+1)k + r - 1\}.$$

Entonces, T es un r -código de identificación. Más aún, $m_r(C_n) = \frac{n+1}{2}$.

Demostración. Sea T como en el enunciado. Resulta T un transversal de $C_{n,r}^*$.

Observemos que como $n = (2r+1)k + r$ y r son impares, luego k es par.

Sean $S_i = \{(i-1)(2r+1), \dots, i(2r+1) - 1\}$ para $i = 1, \dots, k$ y $R = \{k(2r+1), \dots, k(2r+1) + r - 1\}$. Es fácil ver que $\mathbb{Z}_n = \bigcup_{i=1}^k S_i \cup R$.

Veamos que en este caso también todos los vértices de C_n están cubiertos.

Dado que $0 \in T$, los vértices en R están r -cubiertos.

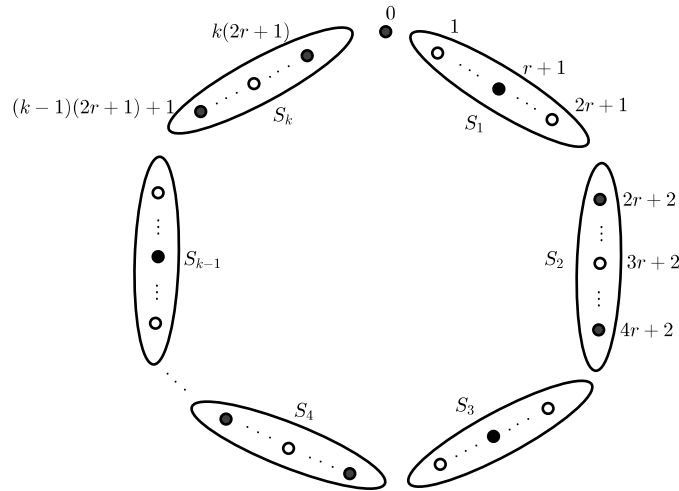


Figura 2. $V(C_{k(2r+1)+1})$, donde los nodos pintados en negro representan los elementos del código C .

Ya sabemos que $r \equiv (2rk+r)(2r+1) \pmod n$ y como r es impar resulta $r \notin T$. Luego $r+(2r+1) = 3r+1 \in T$.

Sigue que $(3r+1) + \ell(2r+1) \in T$ con ℓ par y $0 \leq \ell \leq k-1$ y los vértices en S_i con i par están r -cubiertos.

Para terminar la prueba, $\{\ell(2r+1), \dots, r + \ell(2r+1) : \ell \text{ par}, 0 \leq \ell \leq k-1\}$ están r -cubiertos por vértices de T .

Entonces a ver $r+2 + \ell(2r+1) \in T$ con ℓ par y $0 \leq \ell \leq k-1$. Para esto basta con chequear que $r+2 \equiv (3k+2)(2r+1) \pmod{k(2r+1)+r}$ y que $3k+2$ es par. \square

4. Conclusiones

En [1] se obtuvo la estimación $\frac{n+1}{2} + \frac{\text{mcd}(2r+1,n)-1}{2} \leq m_r(C_n) \leq \frac{n+1}{2} + r$. En este trabajo hemos podido determinar una familia de grafos $C_{k(2r+1)+r}$ cuando k y r tienen diferente paridad, para los cuales se consigue la cota inferior. También analizamos a los grafos $C_{k(2r+1)+1}$ para los cuales el valor del mínimo código de identificación coincide con la cota superior dada solo en el caso en que $r = 1$, para los restantes valores de r la cota resultó poco ajustada. Estos resultados nos motivan para el análisis posterior de otros casos que aún no han sido determinados y de otras familias de grafos donde es muy importante la aplicabilidad de esta línea de investigación.

Referencias

1. Gravier, S., Moncel, J., Semri, A.: Identifying codes of cycles. European Journal of Combinatorics 27, 767–776 (2006)

8 Códigos de identificación en ciclos

2. Bertrand, N., Charon, I., Hudry, O., Lobstein, A.: 1-Identifying codes on trees. *Australasian Journal of Combinatorics* 31, 21–35 (2005)
3. Bertrand, N., Charon, I., Hudry, O., Lobstein, A.: Identifying and locating-dominating codes on chains and cycles. *European Journal of Combinatorics* 25 (7), 969–987 (2004)
4. Blass, U., Honkala, I., Litsyn, S.: Bounds on identifying codes. *Discrete Mathematics* 241, 119–128 (2001)
5. Charon, I., Hudry, O., Lobstein, A.: Minimizing the size of an identifying or locating-dominating code in a graph is NP-hard. *Theoretical Computer Science* 290 (3), 2109–2120 (2003)
6. Daniel, M.: Codes identifiants. Master's Dissertation. In French (2003)
7. Daniel, M., Gravier, S., Moncel, J.: Identifying codes in some subgraphs of the square lattice. *Theoretical Computer Science* 319, 411–421 (2004)
8. Karpovsky, M.G., Chakrabarty, K., Levitin, L.B.: On a new class of codes for identifying vertices in graphs. *IEEE Transactions on Information Theory* 44 (2), 599–611 (1998)